

Limites e Continuidade

2009/10

Definição

Seja f uma função definida num vizinhança de a . Diz-se que f é diferenciável em a se existe o limite

$$D = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

e escreve-se $D = f'(a)$

Nota: A D dá-se o nome de **derivada de f em a** .

Definição

Uma função f é diferenciável em a se e só se existe $D \in \mathbb{R}$ tal que

$$f(x) = f(a) + D(x - a) + (x - a)r(x - a),$$

em que r é uma função definida numa vizinhança de a tal que

$$\lim_{x \rightarrow a} r(x - a) = 0.$$

Nota: Necessariamente, a constante D é única e coincide com o limite anterior.

Definição

Se f está definida num intervalo $[a, a + \epsilon[$ ($\epsilon > 0$), diz-se que f tem **derivada lateral direita** em a se e só se existe um real D^+ tal que

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = D^+.$$

Alternativamente, representamos $f'(a^+) = D^+$.

Definição

Se f é diferenciável no ponto a , chama-se **tangente** ao gráfico de f no ponto $(a, f(a))$ à recta que passa por este ponto e tem declive igual a $f'(a)$:

$$y = f(a) + f'(a)(x - a).$$

Definição

Seja f uma função definida num intervalo aberto I tal que f é diferenciável em todo o $x \in I$. Designamos por **função derivada** de f a aplicação

$$f' : I \mapsto \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

Teorema

Considere a função $f(x) = x^n$ com $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{R}$. Então $f'(x) = nx^{n-1}$.

Teorema

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em a . Então $f + g$ é diferenciável em a e, sendo k um número real, kf é diferenciável em a . Temos

$$(f + g)'(a) = f'(a) + g'(a) \quad \text{e} \quad (kf)'(a) = kf'(a).$$

Corolário

Seja

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$$

um polinómio de grau n definido em $\mathbb{R}$. Então f é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua função derivada é o polinómio de grau $(n - 1)$:

$$p'(x) = n a_n x^{n-1} + (n - 1) a_{n-1} x^{n-2} + \dots + a_2 x + a_1 .$$

Teorema

Se uma função f é diferenciável num ponto a então ela é contínua em a .

Teorema

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em a . Então:

(i) fg é diferenciável em a e

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a).$$

(ii) Se $f(a) \neq 0$ então $\frac{1}{f}$ é diferenciável em a e

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(a) = -\frac{f'(a)}{f^2(a)}.$$

Teorema

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em a . Então:

(iii) Se $g(a) \neq 0$ então $\frac{f}{g}$ é diferenciável em a e

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}.$$

Corolário

Considere a função $f(x) = x^p$ com $p \in \mathbb{Z}^-$ e $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Então f é diferenciável em x e

$$f'(x) = px^{p-1}.$$

Teorema

Derivação de funções trigonométricas

(i) A função $\sin(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua derivada é

$$(\sin)'(x) = \cos(x).$$

(ii) A função $\cos(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}$ e a sua derivada é

$$(\cos)'(x) = -\sin(x).$$

Teorema

Derivação de funções trigonométricas

(iii) A função $\tan(x)$ é diferenciável em $\mathbb{R}/\{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$ e a sua derivada é

$$(\tan)'(x) = \sec^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}.$$

Teorema

Derivação da função exponencial

Considere a função $f(x) = e^x$, definida em $\mathbb{R}$. Então f é diferenciável e a sua derivada é

$$f'(x) = e^x.$$

Teorema

Derivação da Função Composta

Seja g uma função diferenciável em a e f uma função diferenciável em $g(a)$. Então $f \circ g$ é diferenciável em a e a sua derivada pode ser obtida através da fórmula

$$(f \circ g)'(a) = f'[g(a)]g'(a) .$$

Teorema

Derivada da Função Inversa *Suponha f estritamente monótona, contínua em $I = [a, b]$. Seja x_0 um ponto interior de I tal que f é diferenciável em x_0 e $f'(x_0) \neq 0$. Então a função inversa f^{-1} é diferenciável em $y_0 = f(x_0)$.*

Nesse ponto, a derivada pode ser obtida através da fórmula

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}.$$

Definição

Seja $f : I \mapsto \mathbb{R}$. Diremos que f tem um **máximo relativo** em x_0 (ou que $f(x_0)$ é um máximo relativo de f) se e só se existir uma vizinhança $V =]x_0 - \epsilon, x_0 + \epsilon[$ tal que

$$\forall x \in V \cap I, \quad f(x) \leq f(x_0).$$

Nota: No caso da propriedade ser válida para todo o $x \in I$, diz-se que f tem um **máximo absoluto**.

Teorema

Seja f uma função diferenciável em $]a, b[$ e suponha que f atinge um máximo (ou mínimo) relativo em $c \in]a, b[$. Então $f'(c) = 0$.

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

(iii) Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

(i) Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.

(ii) Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.

(iii) Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

- (i) Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.*
- (ii) Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.*
- (iii) Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.*

Teorema

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $]a, b[$.

(i) Se $f''(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente crescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **convexa**.

(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente decrescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **côncava**.

(iii) Se $f''(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é constante.

Teorema

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $]a, b[$.

*(i) Se $f''(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente crescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **convexa**.*

*(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente decrescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **côncava**.*

(iii) Se $f''(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é constante.

Teorema

Seja f uma função duas vezes diferenciável em $]a, b[$.

*(i) Se $f''(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente crescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **convexa**.*

*(ii) Se $f''(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é estritamente decrescente em $]a, b[$, e diz-se que f é **côncava**.*

(iii) Se $f''(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f' é constante.

Teorema

Teste da segunda derivada

Seja f uma função duas vezes diferenciável numa vizinhança $V_\epsilon(x_0)$. Suponha que $f'(x_0) = 0$ e que f'' é contínua em $V_\epsilon(x_0)$.

(i) Se $f''(x_0) > 0$ então f tem em x_0 um mínimo relativo estrito.

(ii) Se $f''(x_0) < 0$ então f tem em x_0 um máximo relativo estrito.

Teorema

Teorema de Rolle

Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$ tal que $f(a) = f(b)$. Então existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = 0$.

Corolário

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há, pelo menos, um zero da sua derivada.

Corolário

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo existe, no máximo, um zero da função.

Corolário

Entre dois zeros de uma função diferenciável num intervalo há, pelo menos, um zero da sua derivada.

Corolário

Entre dois zeros consecutivos da derivada de uma função diferenciável num intervalo existe, no máximo, um zero da função.

Teorema

Teorema de Darboux

Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo aberto e $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável em I . Se existirem $a, b \in I$, $a < b$, tais que $f'(a) \neq f'(b)$ então, para todo o k entre $f'(a)$ e $f'(b)$, existe $c \in]a, b[$ tal que $f'(c) = k$.

Teorema

Teorema de Lagrange

*Seja f uma função contínua em $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.
Então existe $c \in]a, b[$ tal que*

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Teorema

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e diferenciável em $]a, b[$.

- (i) Se $f'(x) > 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente crescente em $[a, b]$.*
- (ii) Se $f'(x) < 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é estritamente decrescente em $[a, b]$.*
- (iii) Se $f'(x) = 0$ para todo o $x \in]a, b[$, então f é constante em $[a, b]$.*

Corolário

Se $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ são contínuas, diferenciáveis em (a, b) e $f'(x) = g'(x)$, $\forall x \in (a, b)$, então a diferença $f - g$ é constante em $[a, b]$.

Corolário

Seja f uma função contínua em a e diferenciável em $]a - \epsilon, a + \epsilon[\setminus \{a\}$. Se existir

$$\lim_{x \rightarrow a} f'(x) = L,$$

então f é diferenciável em a e $f'(a) = L$.

Teorema

Teorema do valor médio de Cauchy

Sejam f, g funções contínuas em $[a, b]$ e diferenciáveis em $]a, b[$ tais que

$$g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in]a, b[.$$

Então existe $c \in]a, b[$ tal que $\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$.

Teorema

Regra de Cauchy

Seja $a \in \mathbb{R}$, $\epsilon > 0$. Sejam f e g funções contínuas à direita de a e diferenciáveis em $]a, a + \epsilon[$. Suponha que $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0$.

Se existir $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$ então

$$\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = L.$$

Nota: Repare que $L \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$

Teorema

Teorema de Taylor

Seja f uma função definida num intervalo $[a, b]$ ($a < b$), com derivadas contínuas até à ordem $n - 1$ em $[a, b]$ e com derivada de ordem n definida em $]a, b[$. Então, existe um ponto $c \in]a, b[$ tal que

$$f(b) = f(a) + (b-a)f'(a) + \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \frac{(b-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

Fórmula de Taylor

de ordem n de f .

$$f(x) = f(a) + (x-a)f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \cdots + \\ + \frac{(x-a)^{n-1}}{(n-1)!}f^{(n-1)}(a) + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(c).$$

com $a < c < x$ ou $x < c < a$.

Fazendo $x = a + h$, obtemos

$$\begin{aligned} f(a + h) = f(a) &+ h f'(a) + \frac{h^2}{2!} f''(a) + \cdots + \\ &+ \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} f^{(n-1)}(a) + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h), \end{aligned}$$

com $0 < \theta < 1$.

O termo $\frac{h^n}{n!} f^{(n)}(a + \theta h)$ ou $\frac{(x - a)^n}{n!} f^{(n)}(c)$ designa-se por **resto de Lagrange** da fórmula de Taylor.

No caso em que $a = 0$, a fórmula de Taylor é conhecida por **fórmula de MacLaurin**:

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \cdots + \\ + f^{(n-1)}(0)\frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n)}(c)\frac{x^n}{n!},$$

com $0 < c < x$ ou $x < c < 0$.

Teorema

Seja $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua num ponto a , interior a D .

- *Se $f(a) > 0$, então existe uma vizinhança V de a tal que $f(x) > 0, \forall x \in V$.*
- *Se $f(a) < 0$, então existe uma vizinhança V de a tal que $f(x) < 0, \forall x \in V$.*

Teorema

Seja f uma função continuamente diferenciável num intervalo I e a um ponto interior a I . Se

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0$$

então

- *se n é ímpar, f não tem extremo relativo em a ;*
- *se n é par, f tem máximo relativo em a se $f^{(n)}(a) < 0$ e tem mínimo relativo em a se $f^{(n)}(a) > 0$.*

Teorema

Sejam I um intervalo e f um função continuamente diferenciável em I . Se a é um ponto interior a I tal que

$$f''(a) = f'''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \text{ e } f^{(n)}(a) \neq 0 \text{ então}$$

- *se n é par, f tem a concavidade voltada para cima se $f^{(n)}(a) > 0$ e tem a concavidade voltada para baixo se $f^{(n)}(a) < 0$;*
- *se n é ímpar, a é ponto de inflexão.*